$y=\frac{1}{x^2+1}$ の極値や凹凸などを調べグラフをかきなさい

微分する。次の公式を使う。

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

この問題の場合は、上記公式の変形版である

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}'=-\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

の方が適している。

$y=\frac{1}{x^2+1}$ の極値や凹凸などを調べグラフをかきなさい

公式　$\left\{\dfrac{1}{g(x)}\right\}' = -\dfrac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$　を使うと

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$　となる

$y' = 0$ の解は？

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} = 0$$ を解きたい。

$(x^2+1)^2 > 0$ だから

$$-2x = 0$$ を解いて

$$x = 0$$

となる。

$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ が分かった

さらにもう一度微分する。今度は次の公式を使う。

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$y'' = \frac{(-2x)'\cdot(x^2+1)^2 - (-2x)\cdot\left((x^2+1)^2\right)'}{\left((x^2+1)^2\right)^2}$$

まず　$(-2x)' = -2$　はすぐ分かる。

$((x^2+1)^2)'$ を計算したい

次に $((x^2+1)^2)'$ を計算したい。

$y=f(u), \quad u=g(x)$ の合成関数 $y=f(g(x))$ の導関数

は $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ だから

$y=u^2, \qquad u=x^2+1$ と考えて

$((x^2+1)^2)'$ を計算したい

$y=u^2,\qquad u=x^2+1$ だから

$\dfrac{dy}{du}=2u,\qquad \dfrac{du}{dx}=2x$ となって

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=2u\cdot 2x=2(x^2+1)\cdot 2x$$

$$= 4x(x^2+1)$$

$y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ のとき $y''=$?

$(-2x)'=-2$,　　$((x^2+1)^2)'=4x(x^2+1)$

が分かったところで、元に戻って

$$y''=\frac{(-2x)'\cdot(x^2+1)^2-(-2x)\cdot((x^2+1)^2)'}{((x^2+1)^2)^2}$$

$$=\frac{-2(x^2+1)^2-(-2x)\cdot 4x(x^2+1)}{((x^2+1)^2)^2}$$

$y' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ のとき $y'' = ?$

$$y'' = \frac{-2(x^2+1)^2 - (-2x)\cdot 4x(x^2+1)}{\left((x^2+1)^2\right)^2}$$

$$= \frac{-2(x^2+1)^2 + 8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{-2(x^2+1) + 8x^2}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^2 - 2 + 8x^2}{(x^2+1)^3}$$

$y''=0$ を解くと？

$$y'' = \frac{-2x^2-2+8x^2}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

が分かった。次に　$y''=\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}=0$　を解く。

$y''=0$ を解くと？

$\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}=0$ は $6x^2-2=0$ となって

$$\begin{aligned} 6x^2 &= 2 \\ 3x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{3} \\ x &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$y=\frac{1}{x^2+1}$　　$y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$　　$y''=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$

$y'=0$ の解は $x=0$

$y''=0$ の解は $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'				0			
y''		0				0	
y							

$y=\frac{1}{x^2+1}$ $y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$ $y''=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$

$y'=0$ の解は $x=0$

$y''=0$ の解は $x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''		0				0	
y							

$$y=\frac{1}{x^2+1} \qquad y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad y''=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y'=0$ の解は $x=0$

$y''=0$ の解は $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y							

$$y=\frac{1}{x^2+1} \qquad y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad y''=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y'=0$ の解は $x=0$

$y''=0$ の解は $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
y''	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y							

$y = \dfrac{1}{x^2+1}$ $\qquad$ $y' = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$ $\qquad$ $y'' = \dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$

$y' = 0$ の解は $x = 0$

$y'' = 0$ の解は $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
y''	$\cup$	0	$\cap$	$\cap$	$\cap$	0	$\cup$
y							

$$y=\frac{1}{x^2+1} \qquad y'=\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \qquad y''=\frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$$

$y'=0$ の解は $x=0$

$y''=0$ の解は $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
y''	$\cup$	0	$\cap$	$\cap$	$\cap$	0	$\cup$
y	⤴		↷		⤵		↳

$y=\dfrac{1}{x^2+1}$　　$y'=\dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$　　$y''=\dfrac{6x^2-2}{(x^2+1)^3}$

$y'=0$ の解は $x=0$　　$y''=0$ の解は $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'	↗	↗	↗	0	↘	↘	↘
y''	∪	0	∩	∩	∩	0	∪
y	⤴		↷		⤵		↳

$x=0,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のときの y の値を求めると

$x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

$$y=\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+1}$$

$$=\frac{1}{\frac{3}{9}+1}=\frac{1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

$x=0$ のとき

$$y = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{0^2+1} = 1$$

よって増減表は

x	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
y''	$\cup$	0	$\cap$	$\cap$	$\cap$	0	$\cup$
y	⤴	$\frac{3}{4}$	$\curvearrowright$	1	⤵	$\frac{3}{4}$	$\hookrightarrow$

$y=\frac{1}{x^2+1}$ の極値や凹凸などを調べグラフをかきなさい

さらに

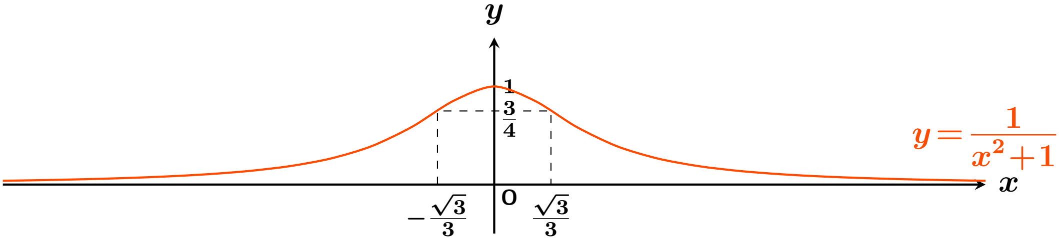
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$

同様に

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$$

となるので、グラフは

$y=\dfrac{1}{x^2+1}$ の極値や凹凸などを調べグラフをかきなさい



x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
y'	↗	↗	↗	0	↘	↘	↘
y''	∪	0	∩	∩	∩	0	∪
y	⤴	$\dfrac{3}{4}$	⤴	1	⤵	$\dfrac{3}{4}$	⤵